

# introducción a las láminas sin flexiones

GUIÓN: FRANCISCO JURADO JIMENEZ

MADRID, MAYO 1982

Ampliados en Mayo de 1983

LOS PROBLEMAS DE LAS CUPULAS del segundo renacimiento italiano se evidencian comparando la sección de San Pedro del Vaticano, que quedará con el Pantón de Agrigento. El estrado de la cúpula del Pantón es relativamente plano y el empuje de su parte alta es recogido por muros

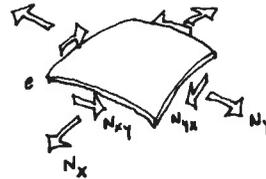
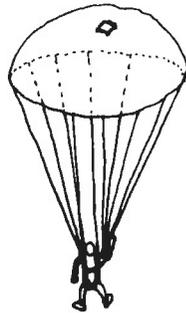
circulares. La parte superior de la cúpula de San Pedro, que sostiene la linterna, ejerce un empuje similar. Para absorberlo, solo esta la parte baja de la propia cúpula. Se colocaron diazudenas, a modo de zunchos, alrededor de la cúpula para aumentar su resistencia, pero el peligro de grietas persiste.

## INDICE

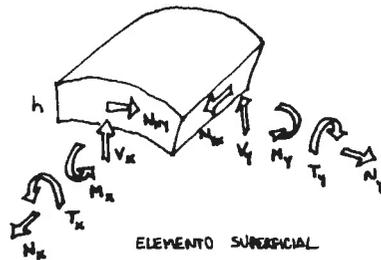
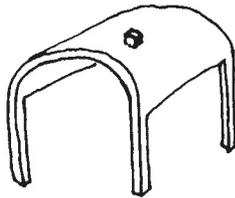
	pg.
Introducción	1
Membranas de revolución	2
Ecuación general de membranas de revolución cargadas con simetría radial	2
Condiciones de borde	4
Depósito cilíndrico lleno de agua	4
Globo esférico sometido al empuje interior de un gas	5
Cúpula delgada esférica bajo la acción de su peso propio	5
Cúpula delgada esférica sometida a la ac- ción de la nieve	6
Ejemplo numérico de cúpula esférica	6
Ecuación general de equilibrio de una mem- brana	7
Componentes de carga	8
Casos particulares	8
Paraboloide hiperbólico equilátero	9
Lámina cilíndrica	10

## BIBLIOGRAFIA ELEMENTAL

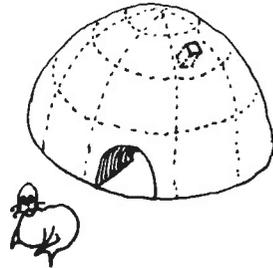
- "Ciencia de la Construcción", tomo III  
de Odone Belluzzi, Ed. Aguilar.
- "Teoría de placas y láminas", de S. Ti-  
moshenko y S. Woionwsky, Ed. Urmo.
- "Stresses in Shells", de W. Flügge, tam-  
bién en versión francesa, aunque proba-  
blemente agotado.
- "Construcción laminar", de Fred Angerer,  
Ed. Gustavo Gili.
- "Las estructuras de Candela", de Faber  
Colin, Ed. C.E.C.S.A.



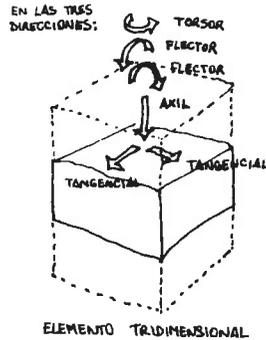
MEMBRANA (LAMINA SIN FLEXIONES NI TORSIONES)  
 $e \ll L \quad e \ll R$  (ESPESOR DESPRECIABLE)



LAMINA EN GENERAL (LOSA CURVA)  
 $h < L/10 \quad h < R/10$



"LAMINA" MUY GUESA



ELEMENTO TRIDIMENSIONAL

INTRODUCCION

Si por lámina entendemos cualquier elemento estructural que es superficial y posee curvatura, cabría hacer matizaciones respecto a su espesor. Se suele entender como lámina aquellos elementos superficiales que poseen un radio de curvatura al menos diez veces mayor que el espesor de la misma, y que salvan distancias entre apoyos también al menos diez veces mayores que dicho espesor. Estas últimas consideraciones nos descartan las estructuras que no son propiamente superficiales, y las que para analizarlas habría que considerar elementos cúbicos, con esfuerzos y tensiones en las tres direcciones del espacio.

En general las láminas poseen los esfuerzos (cinco para cada una de las direcciones que se consideran) que se indican en la figura: tangenciales ( $N_{xy}$  y  $N_{yx}$ ) cortantes ( $V_x$  y  $V_y$ ), momentos flectores ( $M_x$  y  $M_y$ ), momentos torsores ( $T_x$  y  $T_y$ ) y axiales ( $N_x$  y  $N_y$ ).

Si la lámina es delgadísima (de espesor despreciable respecto a sus dimensiones y su radio de curvatura) se le suele llamar MEMBRANA, y se considera que está desprovista de rigidez a torsión y a flexión, con lo que sólo posee esfuerzos en el plano tangente ( $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}=N_{yx}$  -iguales por equilibrio local de momentos en el plano tangente-).

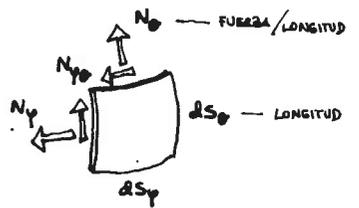
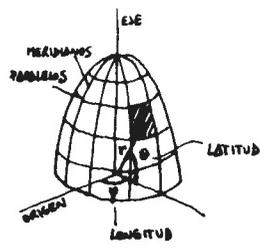
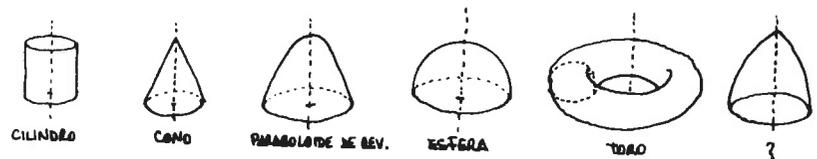
Las membranas serán el objeto de nuestro estudio.

Las membranas, al estar desprovistas de momentos flectores y torsores y de esfuerzos cortantes, poseen tensiones uniformemente repartidas en el espesor de la membrana.

Para calcular los esfuerzos de las membranas, bastan las condiciones de equilibrio, por lo que el problema es estáticamente determinado (internamente). En el caso de las losas curvas (láminas con flexiones), el problema es hiperestático, y el problema es mucho más complicado; sin embargo en la resolución de losas curvas pueden utilizarse con buena aproximación los resultados obtenidos para las membranas, teniendo en cuenta por separado las acciones en el contorno.

Las membranas (láminas sin flexiones) proporcionan los esfuerzos necesarios para el equilibrio mediante su propia forma, mediante su propia curvatura. Si la membrana no tiene una forma tal que sea compatible con las fuerzas exteriores (imaginemos que no posee curvatura y se le aplican esfuerzos normales a su plano), el equilibrio no es posible (aparecerían flexiones que, al no ser resistidas por la ausencia de rigidez, producirían deformaciones muy altas hasta que se alcanzara otra forma adecuada para la resistencia, o bien, la rotura).

Quizás un ejemplo muy claro a la hora de hablar de membranas sea la estructura exterior de un huevo, y por supuesto, cualquier tipo de tela.



MEMBRANAS DE REVOLUCION

Son las generadas por el giro de una línea cualquiera alrededor de un eje. Geométricamente se les puede dividir en paralelos y meridianos.

Si se supone el eje vertical, los meridianos pasan por él dividiendo la membrana en dos partes iguales (meridiano significa por el medio); los paralelos son paralelos al Ecuador o círculo máximo horizontal.

Cualquier punto de la membrana puede ser fácilmente determinado en coordenadas polares, mediante el radio vector, la longitud y la latitud.

Un elemento superficial de la membrana poseerá los esfuerzos  $N_0, N_p, N_{p0}$

Estos esfuerzos poseen unidades de fuerza dividida por unidad de longitud. Debido a la distribución uniforme de tensiones en el espesor de la membrana, bastaría dividir estos esfuerzos por el espesor de la membrana para obtener las correspondientes tensiones normales y tangenciales.

ECUACION GENERAL DE MEMBRANAS DE REVOLUCION CARGADAS CON SIMETRIA RADIAL

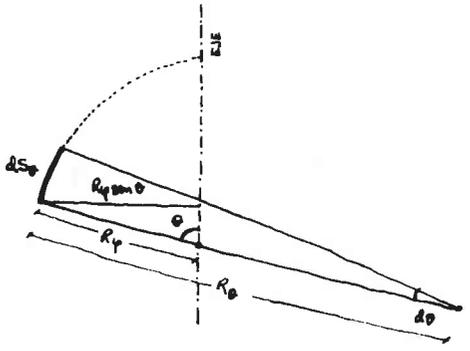
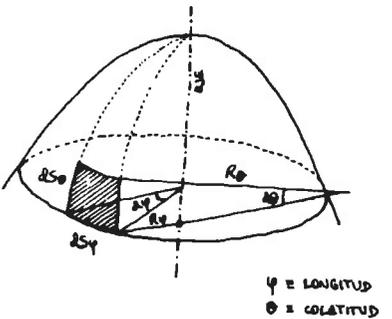
Si la carga es simétrica respecto al eje de revolución, meridianos y paralelos se constituyen localmente en direcciones principales y no existen (para cortes dados según esas direcciones) tensiones tangenciales ( $N_{p0}=0$ ). Esto es fácil de intuir al pensar que, si hay simetría respecto al eje de revolución, tanto geométrica como de cargas, cualquier gajo entre dos meridianos que aislemos tiene que comportarse del mismo modo que el contiguo, sin transmitirse por consiguiente tensiones tangenciales, que variarían los esfuerzos  $N_0$  de un gajo a otro.

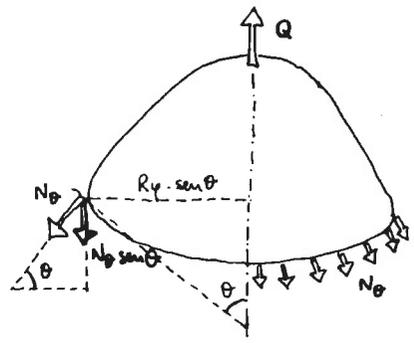
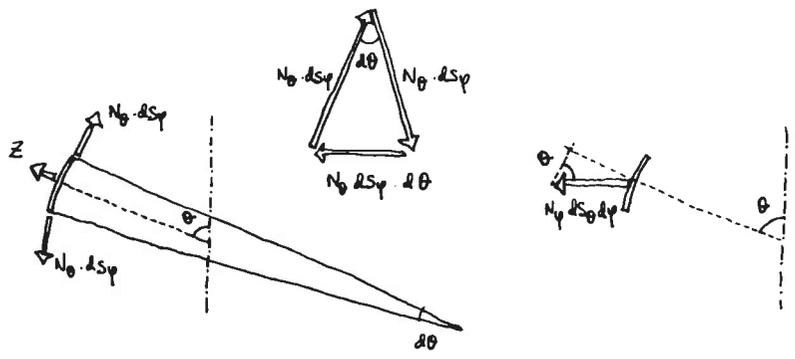
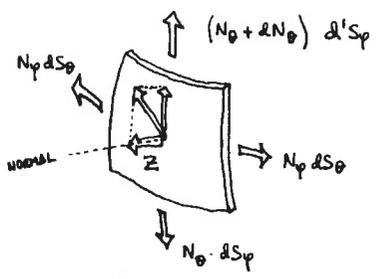
Llamando  $R_p$  = Radio de curvatura según el paralelo  
 $R_0$  = Radio de curvatura según el meridiano

las dimensiones del elemento superficial que aislemos para considerar el equilibrio tendría las dimensiones siguientes:

$$dS_p = R_p \cdot \text{sen } \theta \cdot d\theta \quad dS_0 = R_0 \cdot d\theta$$

Dicho elemento superficial estará solicitado por una fuerza exterior (que necesariamente 'apuntará' hacia el eje de revolución, por la condición de simetría de cargas enunciada) que tiene una componente normal Z de presión (fuerza por unidad de superficie).





En la figura adjunta se representa el elemento diferencial solicitado por todas las fuerzas que sobre él actúan (la fuerza exterior y los productos de los esfuerzos por la longitud del borde donde están aplicados).

La longitud  $d'S_p$  se diferencia de  $dS_p$  en un infinitésimo de segundo orden, por lo que prescindiremos de dicha diferencia.

La componente tangencial de la fuerza inclinada exterior actuante es resistida por la fuerza  $dN_0 \cdot dS_p$ .

Considerando el equilibrio según la normal al elemento (dirección de Z), los esfuerzos dirigidos según meridianos aportan una componente normal que vale

$$N_0 \cdot dS_p \cdot d\theta$$

análogamente, los esfuerzos según paralelos aportarían  $N_p \cdot dS_p \cdot d\phi$  fuerza que, al estar dirigida según la normal al eje de revolución, en sentido horizontal, habría que proyectar sobre la normal a la superficie multiplicando por  $\sin \theta$ .

Con lo que nos queda  $N_0 dS_p d\theta + N_p dS_p d\phi \cdot \sin \theta = Z dS_p dS_\theta$  sustituyendo  $dS_\theta$  y  $dS_p$  por sus valores

$$N_0 \cdot R_p \sin \theta \cdot d\theta / d\theta + N_p R_\theta d\theta / d\phi \sin \theta = Z \cdot R_p \sin \theta \cdot d\phi R_\theta / d\phi$$

tras simplificar

$$\boxed{\frac{N_0}{R_\theta} + \frac{N_p}{R_p} = Z}$$

criterio de signos: si Z es hacia afuera (+)  $N_0$  y  $N_p$  son tracciones (+), (o sea suma es +)

Para obtener la otra ecuación de equilibrio, suficiente para resolver las dos incógnitas, consideraremos el equilibrio al cortar toda la superficie por un paralelo.

La componente vertical Q suma de todas las fuerzas actuantes por encima del paralelo por el que cortamos, es equilibrada por los esfuerzos  $N_0$ , por tanto

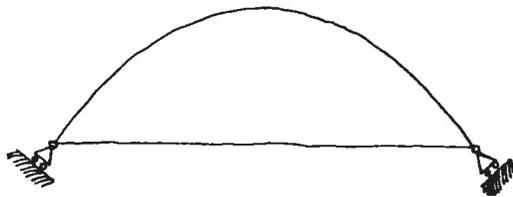
$$N_0 \cdot \sin \theta \cdot 2\pi R_p \cdot \sin \theta = Q$$

$$\boxed{N_0 = \frac{Q}{2\pi R_p \sin^2 \theta}}$$

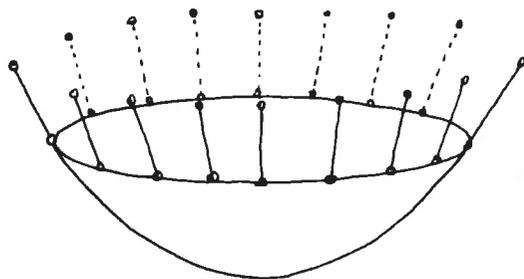
criterio de signos: si Q es hacia arriba (+)  $N_0$  es tracción (+).

Vemos que el problema es estáticamente determinado. Bastaría obtener en primer lugar  $N_0$  directamente en la segunda ecuación y después sustituir su valor en la primera obteniendo  $N_p$ .

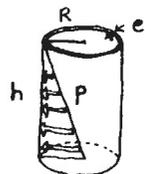
ENLACES QUE NO PRODUCEN DISCONTINUIDAD EN EL REGIMEN DE MEMBRANA.



Apoyo articulado y deslizante sobre una base coaxial con la membrana y que la corta normalmente.



Apoyo constituido por tirantes perpendiculares dirigidos según las tangentes a los meridianos.



CONDICIONES DE BORDE

Los esfuerzos de membrana que hemos obtenido hasta ahora constituyen el llamado régimen de membrana, y subsisten en todo punto de la superficie. Dicho régimen permite la validez de las expresiones obtenidas (y las que obtendremos para cualquier membrana) independientemente del trozo que constiuya la membrana, es decir, independientemente de la forma y tamaño del borde. Ahora bien, para que el régimen de membrana sea válido, en el borde deben subsistir las mismas condiciones que habría si allí continuase la membrana ilimitadamente. Esto implica que en el contorno (en el cual se incluye naturalmente los apoyos) no pueden aplicarse reacciones con componentes normales a la superficie (que provocarían esfuerzos cortantes) ni momentos respecto a la tangente en el contorno (que provocarían flexiones ante las cuales la membrana no posee rigidez).

En la mayoría de los casos reales, o bien se realiza el enlace adecuado en el contorno, de manera que mantenga la continuidad de los esfuerzos de la membrana, o bien, se acude a un considerable aumento de sección de manera que se resistan localmente las alteraciones al régimen de la membrana. De todos modos, si se producen alteraciones en el borde, puede seguir considerándose el régimen de membrana hasta pequeñas distancias del contorno, ya que dichas alteraciones se amortiguan rápidamente, y sólo se tienen en cuenta separadamente, como sollicitaciones locales.

DEPOSITO CILINDRICO LLENO DE AGUA

Al margen de otras sollicitaciones, consideraremos el depósito sometido a su peso propio y al empuje hidrostático del agua.

Las condiciones geométricas son  $R_{\phi} = R$   $R_{\theta} = \infty$  (sin curvatura)  $\phi = 90^\circ$  (SIEMPRE) por lo que

$$N_{\theta} = \frac{Q}{2\pi R} \quad \boxed{\frac{N_{\phi}}{R} = P} \quad (z = p \text{ PRESION NORMAL A LA SUPERFICIE})$$

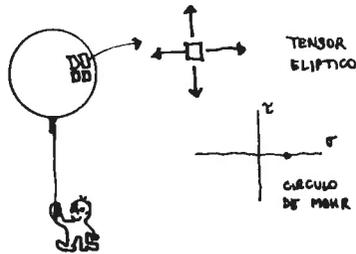
pero  $Q = 2\pi R \cdot e \cdot \gamma \cdot h$   $p = \gamma_{\text{agua}} \cdot h$   
 $\downarrow$  PESO ESPECIFICO DEPOSITO  $\downarrow$  1 to/mm<sup>3</sup>  
 $\downarrow$  ESPESOR

$$N_{\theta} = -e \cdot \gamma \cdot h \quad \frac{N_{\phi}}{R} = h$$

to/mm.    mm.    mm.

Ambas expresiones nos proporcionan los esfuerzos de compresión verticales debidos al peso propio del depósito ( $N_{\theta}$ ) y los esfuerzos de tracción en cada anillo horizontal ( $N_{\phi}$ ) debidos al empuje del agua; ambos en función de la altura (por encima de la sección considerada) del depósito.

Si en la base no existe libre deformación (es el caso de casi todos los depósitos), existe una perturbación, con la aparición de flexiones en las paredes, en la cercanía de la base.



GLOBO ESFERICO SOMETIDO AL EMPUJE INTERIOR DE UN GAS

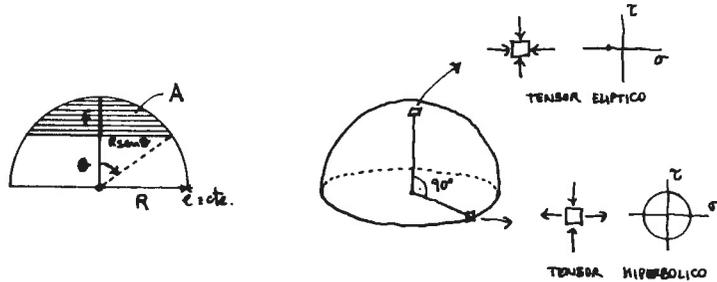
Como en el caso anterior, al ser el empuje del gas una presión hidrostática, toda la superficie está sometida a una presión normal  $Z = p$  constante en todas las direcciones. Las condiciones geométricas son  $R_\theta = R_\varphi = R$ . Por simetría en este caso será  $N_\theta = N_\varphi$  por lo que basta expresar de donde se deduce  $\frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\varphi}{R} = p$

$$N_\theta = N_\varphi = \frac{p \cdot R}{2}$$

que nos da los esfuerzos de tracción del globo en cualquier dirección (ya que el tensor de tensiones es elíptico, se reduce a un punto, y todas son direcciones principales).

CUPULA DELGADA ESFERICA BAJO LA ACCION DE SU PESO PROPIO

Como ya hemos indicado antes, si la cúpula es lo suficientemente delgada, carece de momentos flectores y podemos calcularla como una membrana. Al ser una esfera es constante el radio de curvatura  $R_\theta = R_\varphi = R$ . Empezando por la segunda ecuación de equilibrio, el peso de la parte superior existente encima de un plano horizontal cualquiera es



$$Q = A \cdot e \cdot \gamma$$

$\begin{matrix} \text{PESO ESPECIFICO} \\ \text{ESPESOR} \\ \text{AREA DE LA ZONA SUPERIOR} \end{matrix}$

$$A = \int_0^\theta 2\pi R \sin\theta \cdot ds = \int_0^\theta [2\pi R^2 \cos\theta]_0^\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos\theta) = 2\pi R f$$

con ello deducimos que

$$N_\theta = - \frac{2\pi R^2 (1 - \cos\theta) e \gamma}{2\pi R \sin^2\theta} = - R e \gamma \frac{1 - \cos\theta}{1 - \cos^2\theta} = - \frac{R e \gamma}{1 + \cos\theta}$$

siempre es compresión

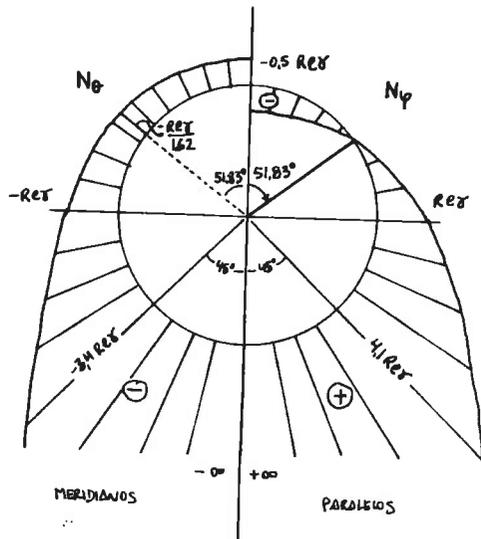
Por otro lado, el peso por unidad de superficie es  $\gamma e$  y su componente normal es  $Z = -\gamma e \cdot \cos\theta$

aplicando la primera ecuación de equilibrio se obtiene, tras sustituir el valor hallado de

$$\frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\varphi}{R} = -\gamma e \cos\theta \quad \text{''} \quad -\frac{e\gamma}{1 + \cos\theta} + \frac{N_\varphi}{R} = -\gamma e \cos\theta \quad \text{''} \quad N_\varphi = R e \gamma \left( \frac{1}{1 + \cos\theta} - \cos\theta \right)$$

este esfuerzo se hace nulo cuando lo es el paréntesis, es decir

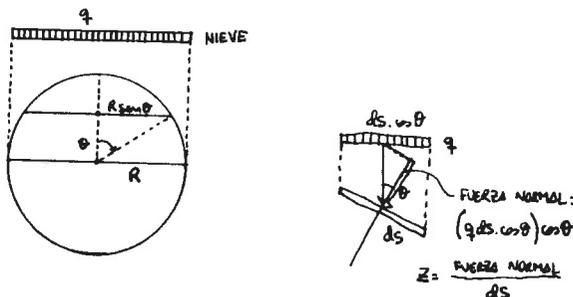
$$N_\varphi = 0 \text{ cuando } \frac{1}{1 + \cos\theta} = \cos\theta \quad \text{''} \quad \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \quad \text{''} \quad \cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{0,618}{1,618} \Rightarrow \theta = 51,83^\circ$$



Para ángulos menores de este valor (cúpulas rebajadas), todo son compresiones; cuando se sobrepasa este ángulo, los esfuerzos en los paralelos son de tracción.

Curiosamente esto parecía ser ya conocido en la antigüedad (el Panteón de Roma, por ejemplo, empieza a aumentar de sección al llegar a este ángulo) debido a que viene a coincidir el valor del  $\cos\theta$  con el de la 'proporción armónica', resultado de despejar a/b de la igualdad  $b/a = (a+b)/b$ , de donde se obtiene  $a/b = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Esta proporción entre el radio de la esfera y la distancia del centro de trazado a la base de la cúpula (o sea el  $\cos\theta$ ) viene a indicar la 'proporción buena', la que permite el máximo peralte sin que aparezcan tracciones en el material de la cúpula (normalmente nada apto para resistirlas, como viene a demostrar el que casi todas las cúpulas que superan este peralte están abiertas, salvo que estén zunchadas de algún modo).

Para el vértice de la cúpula ( $\theta = 0$ ) el tensor de tensiones es elíptico, es decir, es un punto singular donde paralelos y meridianos se confunden; para  $\theta = 90^\circ$  el tensor es hiperbólico. Para  $\theta = 180^\circ$  las tensiones son infinitas (lógicamente, la acumulación del peso de toda la superficie habría de ser resistida en un solo punto).



CUPULA DELGADA ESFERICA SOMETIDA A LA ACCION DE LA NIEVE

La sobrecarga de nieve es constante ( $q$ ) por unidad de superficie horizontal o de proyección. Debido a que, lógicamente, sólo actúa sobre la mitad superior de la cúpula, habrá que distinguir entre la mitad superior ( $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ) y la mitad inferior ( $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ). Empezamos como en el caso anterior con la segunda ecuación de equilibrio

MITAD SUPERIOR:

$$Q = -q \cdot \pi (R \cos \theta)^2$$

$$N_\theta = -\frac{q \pi R^2 \cos^2 \theta}{2 \pi R \sin^2 \theta} = -\frac{qR}{2}$$

MITAD INFERIOR:

$$Q = -q \cdot \pi \cdot R^2$$

$$N_\theta = -\frac{q \pi R^2}{2 \pi R \sin^2 \theta} = -\frac{qR}{2 \sin^2 \theta}$$

veamos que en la mitad superior los esfuerzos según los meridianos son constantes y de compresión, mientras que en la mitad inferior son también de compresión crecientes hacia abajo, hasta alcanzar el valor infinito en el vértice inferior ( $\theta = 180^\circ$ ). Considerando ahora la componente normal de la presión de la nieve sobre la cúpula y aplicando la primera ecuación de equilibrio obtenemos

MITAD SUPERIOR:

$$z = -q \cos^2 \theta$$

$$\frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\varphi}{R} = -q \cos^2 \theta$$

$$\frac{N_\varphi}{R} = -q \cos^2 \theta + \frac{q}{2}$$

$$N_\varphi = qR \left( \frac{1}{2} - \cos^2 \theta \right) = -\frac{qR}{2} \cos 2\theta$$

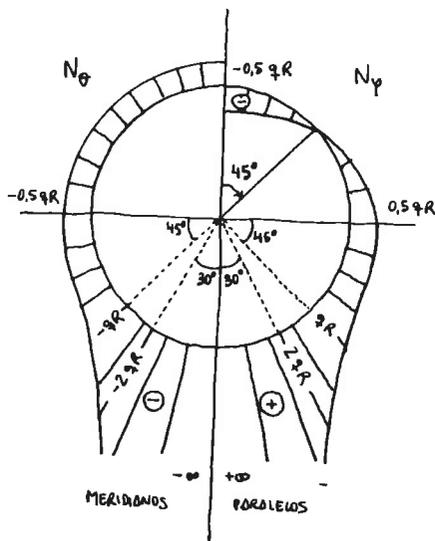
MITAD INFERIOR:

$$z = 0$$

$$\frac{N_\theta}{R} + \frac{N_\varphi}{R} = 0$$

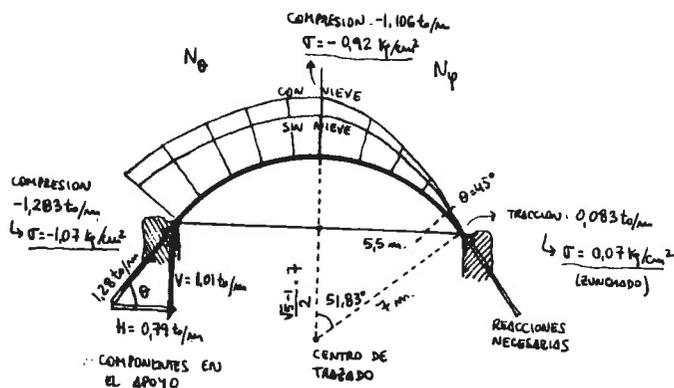
$$\frac{N_\varphi}{R} = \frac{q}{2 \sin^2 \theta}$$

$$N_\varphi = \frac{qR}{2 \sin^2 \theta}$$



EJEMPLO NUMERICO DE CUPULA ESFERICA

Para darnos una idea de la idoneidad de las superficies de doble curvatura a la hora de resistir cargas verticales, veamos un ejemplo numérico, constituido por una cúpula esférica de 7 m. de radio, rebajada justo hasta su 'proporción armónica'; de 12 cm. de espesor (supon gamos que es de ladrillo, de doble tablero de rasilla antigua, con un peso específico de  $1,8 \text{ to/m}^3$ .), sometida a su propio peso y a una sobrecarga de nieve de  $0,1 \text{ to/m}^2$ .



PESO PROPIO:

VERTICE SUPERIOR

$$N_\theta = N_\varphi = -\frac{R \cdot \gamma}{2} = -\frac{7 \cdot 0.12 \cdot 1.8}{2} = -0.756 \text{ to/m}$$

CONTORNO

$$N_\theta = 0$$

$$N_\varphi = -\frac{R \cdot \gamma}{1.62} = -0.933 \text{ to/m}$$

NIEVE:

VERTICE SUPERIOR

$$N_\theta = N_\varphi = -\frac{qR}{2} = -\frac{0.1 \cdot 7}{2} = -0.35 \text{ to/m}$$

CONTORNO

$$N_\theta = -0.35 \text{ to/m}$$

$$N_\varphi = -\frac{qR}{2} \cos(2 \cdot 51.83^\circ) = 0.083 \text{ to/m}$$

En la figura se dan los valores suma y las tensiones que suponen al dividir estos esfuerzos por el espesor de la cúpula. Vemos como son tensiones muy pequeñas.

CONO DELGADO SOMETIDO A LA ACCION DE SU PESO PROPIO

El peso del cono situado por encima de una sección genérica de radio  $r$  vendrá dado por el producto del área del cono situada encima por el espesor y por el peso específico del material

$$Q = -\gamma \cdot e \frac{\pi(R^2 - r^2)}{\omega \theta}$$

por ello, con la segunda ecuación de equilibrio obtenemos los esfuerzos según las generatrices (meridianos) del cono

$$N_\theta = \frac{Q}{2\pi R_y \sin^2 \theta} = -\gamma e \frac{R^2 - r^2}{r \sin 2\theta} \quad \text{siempre compresiones}$$

y como

$$z = \gamma e \omega \theta \quad \text{obtenemos por la primera ecuación de equilibrio}$$

$$\frac{N_\theta}{\omega} + \frac{N_\varphi}{r/\sin \theta} = \gamma e \omega \theta \quad \text{''} \quad N_\varphi = \frac{\gamma e r}{\tan \theta} \quad \text{siempre tracción.}$$

DEPOSITO CONICO LLENO DE AGUA

El peso propio del depósito es el caso anterior; prescindiendo en este momento del mismo y considerando solamente la acción del peso del agua, tenemos

$$Q = -\frac{1}{3} \pi \gamma_{\text{agua}} (R^2 H - r^2 h) + \pi \gamma_{\text{agua}} r^2 (H - h) = -\gamma_{\text{agua}} \pi \frac{1}{3} \theta \left( \frac{R^3}{3} + \frac{2r^3}{3} - r^2 R \right)$$

ya que sólo hemos de considerar el peso de agua por encima de la sección considerada que se apoya sobre la membrana que constituye el depósito (el cilindro cuyo volumen se descuenta se "apoya" en el agua situada inmediatamente debajo, que cargará a su vez sobre zonas inferiores de la membrana).

Por tanto, el esfuerzo que se obtiene para las generatrices es

$$N_\theta = \frac{Q}{2\pi r \sin \theta} = -\frac{\gamma_{\text{agua}}}{\omega \theta} \left( \frac{R^3}{3r} + \frac{r^2}{3} - \frac{rR}{2} \right) \quad \text{compresiones}$$

y como

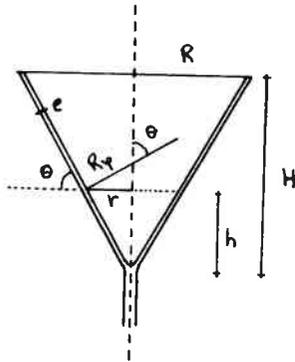
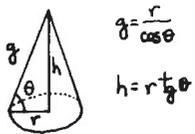
$$z = \gamma_{\text{agua}} (H - h) = \gamma_{\text{agua}} \tan \theta (R - r)$$

obtenemos para los paralelos

$$N_\varphi = \gamma_{\text{agua}} \frac{r(R-r)}{\omega \theta} \quad \text{tracciones}$$

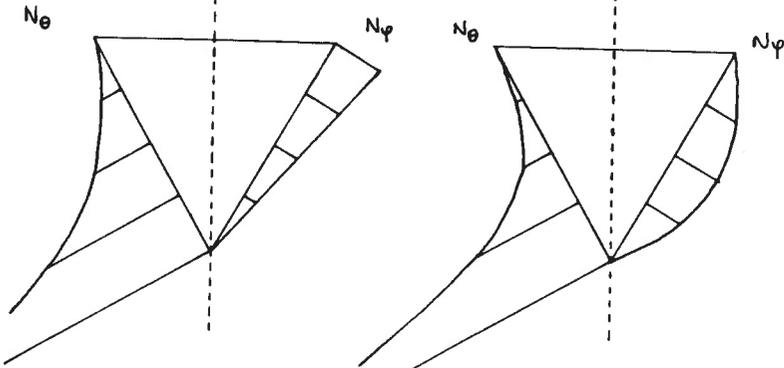
Este segundo valor se corresponde con una parábola con el máximo en el punto medio de la altura del depósito, y con valores nulos en la base y en la superficie del agua.

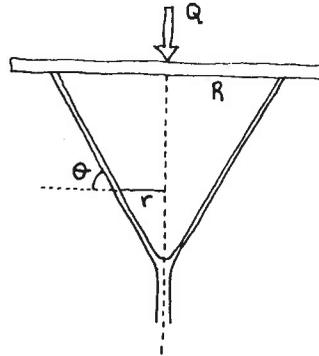
Tanto en el caso del peso propio como en el caso de la acción del peso del agua, los valores de los esfuerzos según las generatrices o meridianos parten de cero en la zona superior para hacerse infinito en el vértice del cono (los valores presentan una asíntota en ese punto). Este punto aparece como una zona singular donde hay que aumentar de grosor el depósito para que sean resistidos los esfuerzos; en efecto, la consideración teórica de que el cono termina en un punto de dimensiones nulas hace que allí aparezcan como consecuencia tensiones infinitas que hacen inviable la resistencia.



PESO PROPIO

AGUA





CAPITEL CONICO HUECO

Si es Q la fuerza que carga sobre el capitel, los esfuerzos que aparecen según las generatrices o meridianos son

$$N_{\theta} = \frac{-Q}{2\pi R \sin^2 \theta} = \frac{-Q}{2\pi r \sin \theta} \text{ compresiones}$$

valor que también se hace infinito cuando  $r=0$ , donde hay que aumentar necesariamente el espesor.

Aplicando la primera ecuación de equilibrio y puesto que no existe carga normal a la superficie de la membrana (sólo estamos considerando la acción de Q)

$$\frac{N_{\theta}}{R \sin \theta} + \frac{N_{\varphi}}{r \sin \theta} = 0 \quad \boxed{N_{\varphi} = 0} \text{ no existen esfuerzos según paralelos}$$

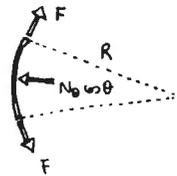
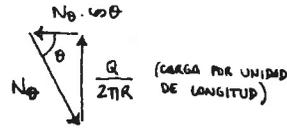
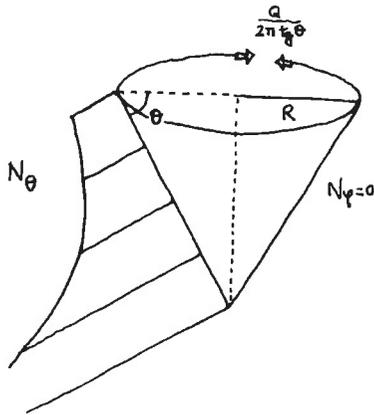
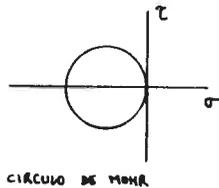
este estado de tensiones de la membrana se llama "distribución radial simple", cuya representación en el círculo de Mohr puede verse en la figura.

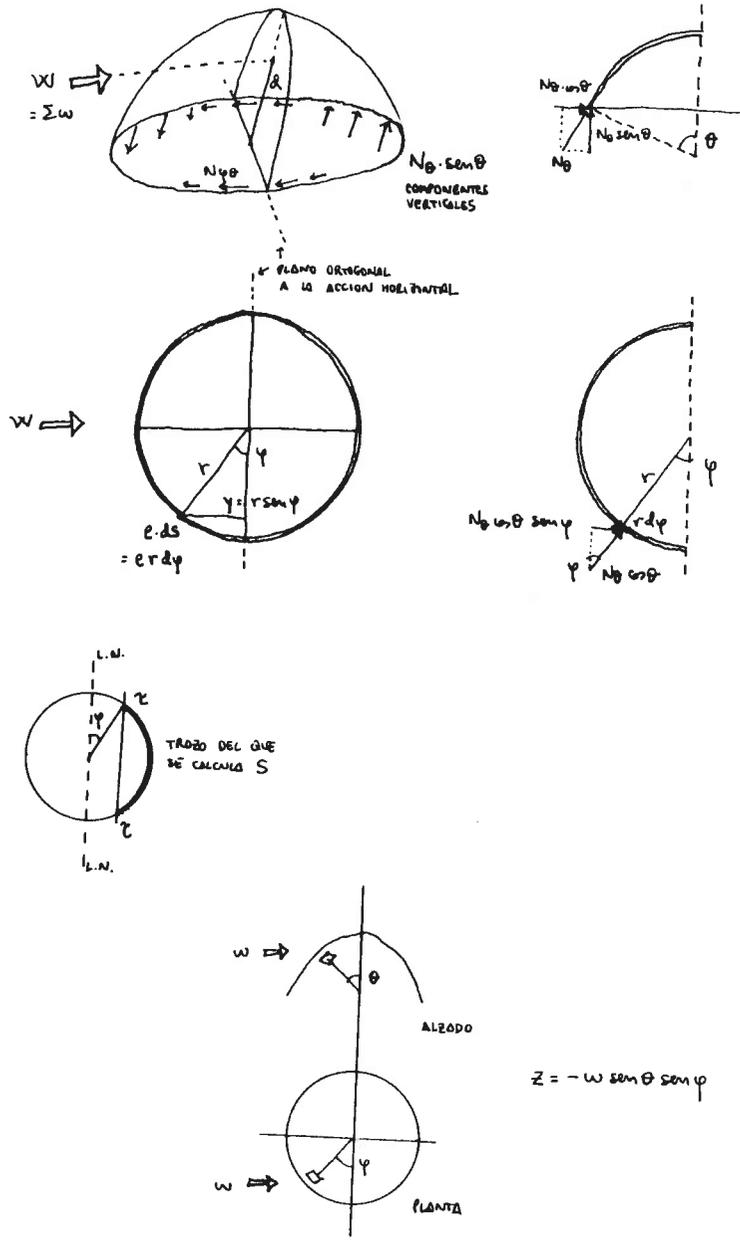
Como condición de borde en la arista superior haría falta un anillo a tracción que proporcione las componentes horizontales necesarias para que los esfuerzos  $N_{\theta}$  equilibren a la carga Q; dichas componentes horizontales (que también las podría aportar una placa de apoyo sobre las que asienten las cargas) valen por unidad de longitud

$$-N_{\theta} \cdot \omega \theta = \frac{Q}{2\pi R} \frac{1}{\sin \theta}$$

que suponen una tracción en la circunferencia superior (si son resistidas con el anillo citado) de valor

$$F = -N_{\theta} \cdot \omega \theta \cdot R = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\sin \theta}$$





ACCION HORIZONTAL SOBRE UNA MEMBRANA DE REVOLUCION

Expondremos aquí un método sencillo para la obtención de los esfuerzos que produce una acción horizontal (viento, por ej.) sobre una membrana de revolución, basado en la consideración de que cada paralelo constituye una sección resistente circular sobre la que actúa globalmente un cortante W (resultante de la acción horizontal) y un momento flector W.d (resultante de la acción horizontal del viento por la distancia entre dicha resultante y la sección considerada). El cálculo se realiza como en cualquier sección en la que dichas sollicitaciones producen tensiones normales (que convenientemente proyectadas constituyen  $N_\theta$ ) y tensiones tangenciales ( $N_\theta \phi$ ).

El momento de inercia de la sección circular es  

$$I = 4 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} e \cdot r \cdot d\varphi (r \cdot \sin \varphi)^2 = 4 e r^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = 4 e r^3 \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = e \pi r^3$$
 por tanto, las tensiones normales que el momento actuante produce sobre la sección son  

$$\sigma = \frac{W \cdot d}{I} \cdot y = \frac{W \cdot d}{e \pi r^3} \cdot r \cdot \sin \varphi$$
 y teniendo en cuenta el valor de  $\sigma$ , obtenemos 
$$\sigma = \frac{N_\theta \cdot \sin \theta}{e}$$

$$N_\theta = \frac{W \cdot d}{\pi r^2} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \quad \begin{matrix} 0 < \varphi < \pi & \text{tracciones} \\ \pi < \varphi < 2\pi & \text{compresiones} \end{matrix}$$

Por otro lado, el cortante W que actúa sobre la sección circular es resistido por los esfuerzos tangenciales  $N_\theta \phi$  y por las componentes horizontales de  $N_\theta$ . La suma de todas las componentes horizontales de  $N_\theta$  a lo largo de toda la circunferencia es

$$F = 2 \int_0^\pi N_\theta \cos \theta \sin \varphi \cdot r d\varphi = 2 \int_0^\pi \frac{W \cdot d}{\pi r} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \theta} d\varphi = \frac{2Wd}{\pi r \sin \theta} \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^\pi = \frac{W \cdot d}{r \sin \theta}$$

Las tensiones tangenciales serán por consiguiente

$$\tau = \frac{W - F}{I \cdot e_a} \quad \begin{matrix} e_a = \text{espesor del alma} = 2 \cdot e \\ S = \text{momento estático respecto al diámetro de la parte de la sección separada por los puntos donde está dicho momento estático vale} \end{matrix}$$

$$S = 2 \int_\varphi^{\pi/2} e r d\varphi \cdot r \sin \varphi = 2 e r^2 [-\cos \varphi]_\varphi^{\pi/2} = 2 e r^2 \cos \varphi$$

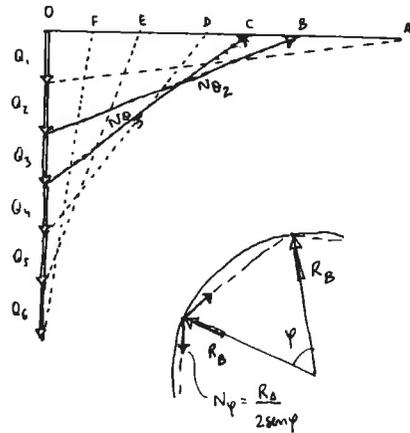
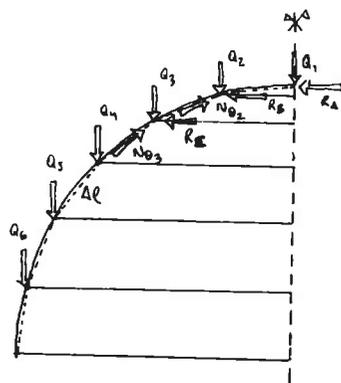
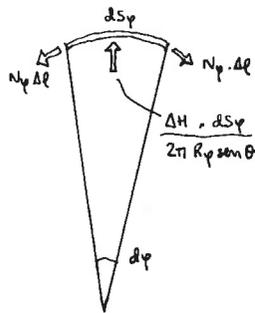
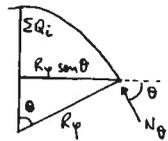
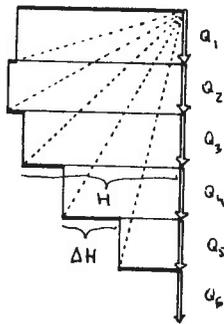
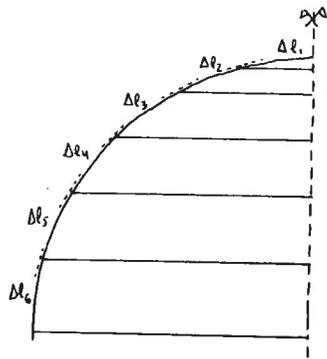
$$\tau = \frac{W - F}{2e} \frac{2 e r^2 \cos \varphi}{e \pi r^3} = \frac{W - F}{e \pi r} \cos \varphi \quad \text{y como } \tau = \frac{N_\theta \phi}{e} \text{ obtenemos}$$

$$N_\theta \phi = \left( 1 - \frac{d}{r \sin \theta} \right) \frac{W \cos \varphi}{\pi r} \quad \text{que presenta valores nulos cuando } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ y valores máximos cuando } \varphi = 0 \text{ } \varphi = \pi$$

Finalmente, la componente  $N_\phi$  se obtiene en función de la componente normal z de la acción en cada punto con la expresión 
$$\frac{N_\theta}{R_\theta} + \frac{N_\phi}{R_\phi} = z$$

si la acción horizontal la produce una presión dinámica de viento w, podemos tomar 
$$z = -w \sin \theta \sin \varphi$$
 con lo que 
$$\frac{W \cdot d}{\pi r^2} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} R_\phi + N_\phi R_\theta = -w R_\theta R_\phi \sin \theta \sin \varphi$$

$$N_\phi = -w r \sin \varphi - \frac{W d}{\pi r R_\theta} \frac{\sin \varphi}{\sin^2 \theta} \quad \begin{matrix} 0 < \varphi < \pi & \text{compresiones} \\ \pi < \varphi < 2\pi & \text{tracciones} \end{matrix}$$



### MÉTODOS GRÁFICOS PARA EL CÁLCULO DE CÚPULAS

#### MÉTODO 1. (Sólo para carga vertical)

Es una construcción gráfica para toda la cúpula. Tras dividirla en anillos arbitrariamente (aquí se ha hecho con anillos de igual área, para que sea siempre  $Q_1=Q_2=...$ ) se colocan los pesos de cada anillo (o la carga que actúe sobre él, siempre que sea vertical) en un polígono de fuerzas y se van trazando las paralelas a las tangentes a meridianos en los puntos de división tal como se ve en la figura.

Así se van obteniendo unas fuerzas H que se corresponden con

$$H = 2\pi R_p \sin \theta \cdot N_\theta \cdot \omega \theta = \frac{Q}{\tan \theta} \quad Q = \sum Q_i \text{ POR ENCIMA DEL PARALELO CONSIDERADO}$$

es decir, H es el conjunto (suma) de las componentes horizontales de  $N_\theta$  para el paralelo considerado.

El incremento de H está relacionado con  $N_p$

$$\Delta l \cdot N_p = \frac{\Delta H}{2\pi R_p \sin \theta} \quad R_p \sin \theta \quad \left[ N_p = \frac{\Delta H}{2\pi \Delta l} \right] \text{ si crece, N es compresión}$$

si decrece es tracción

$N_\theta$  se obtiene de la expresión

$$N_\theta = \frac{Q - \sum Q_i}{2\pi R \sin^2 \theta}$$

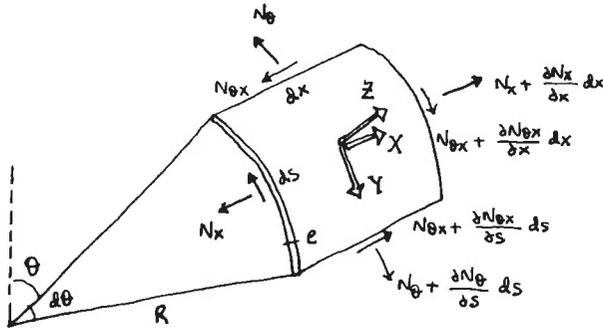
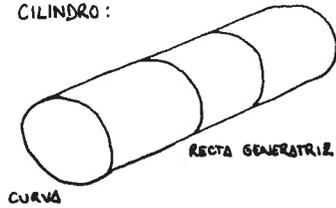
#### MÉTODO 2.

Aunque es un método ideado en principio para cúpulas trianguladas (léanse entonces los esfuerzos  $N_\theta$  y  $N_p$  como fuerzas directamente) también puede utilizarse para membranas, con esto calcularíamos un "gajo", y los verdaderos esfuerzos  $N_\theta$  y  $N_p$  se obtendrían dividiendo estas fuerzas por cada ancho de tramo donde están aplicadas (para las divisiones de la figura,  $N_p$  estaría aplicada siempre sobre un mismo ancho de meridiano  $\Delta l$  y  $N_\theta$  iría estando aplicada sobre anchuras crecientes hacia el ecuador, en la medida que aumenta el radio del paralelo).

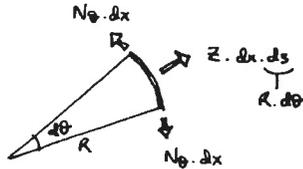
Colocadas sobre los nudos las fuerzas que actúan en cada trozo, estas son equilibradas por los esfuerzos según meridianos y las componentes horizontales R ( $R_a=OA$ ,  $R_b=AB$ ,  $R_c=BC$ , etc.), la componente horizontal R se descompone en cada paralelo en los esfuerzos  $N_p$

Nótese que al haber tomado aquí  $Q_1$  igual al resto de las fuerzas, es como si actuara el doble de carga en el vértice superior ( $Q_1$  y su simétrica), por lo que, comparativamente, la compresión inicial  $R_a$  es mucho más grande que lo que corresponde a una membrana, y, por tanto, el resto de  $R_i$  producen tracciones en los paralelos. El lector podrá comprobar fácilmente cómo tomando  $Q_1$  de valor mitad, aparece exactamente la distribución de tensiones de la cúpula como membrana, siempre que el dibujo sea lo suficientemente exacto.

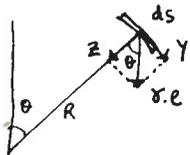
CILINDRO:



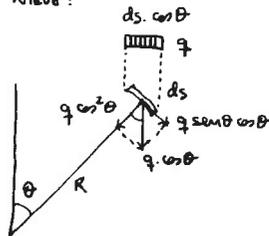
EQUILIBRIO COMPONENTE NORMAL:



P. PROPIO:



NIEVE:



LAMINAS CILINDRICAS. CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Podemos denominar cilindros, en general, a todas aquellas superficies engendradas por una curva que se mueve a lo largo de una recta generadora (que, para mayor sencillez, supondremos horizontal), por lo que podemos hablar de cilindros circulares, parabólicos, elípticos, ...

Tomando como referencias las cotas  $x$  sobre el eje definido por la recta generatriz y el ángulo  $\theta$  que forma la normal en cada punto a la superficie con la vertical, y, llamando  $R$  al radio de curvatura en el punto de la superficie que consideremos, tenemos completamente definida la geometría de la membrana con esos tres parámetros y variables  $x, \theta$  y  $R$ .

Aislemos un elemento diferencial de la membrana de lados  $dx, ds = R \cdot d\theta$ . Sobre dichos lados actúan los esfuerzos por unidad de longitud  $N_x, N_\theta$  y  $N_{x+\theta} = N_{\theta+x}$  (iguales para que haya equilibrio de momentos en el plano tangencial al punto de la lámina considerado). Sobre la superficie  $dx \cdot ds$  actúa también una carga definida por sus tres componentes de tensión  $X$  (en la dirección de dicho eje),  $Y$  (en la dirección normal a  $X$  y en el plano tangente) y  $Z$  (en la dirección normal a la membrana).

La componente normal sólo puede ser equilibrada por los esfuerzos  $N_\theta$  con lo que se obtiene

$$\frac{N_\theta}{R} = Z \quad [1]$$

y, por otro lado, expresando el equilibrio de fuerzas según las otras dos direcciones de la carga obtenemos

$$\frac{\partial N_\theta}{\partial s} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + Y = 0 \quad [2]$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial s} + X = 0 \quad [3]$$

(los signos positivos de  $N_\theta$  y de  $N_x$  indican tracciones)

Como consecuencia del isostatismo implícito de las membranas, tenemos tres ecuaciones (derivadas directamente del equilibrio de fuerzas) con tres incógnitas, pues basta ir aplicando las ecuaciones escritas en el mismo orden que lo hemos hecho para ir obteniendo consecutivamente  $N_\theta, N_{\theta x}$  y  $N_x$ .

Las componentes de carga en función de cada tipo de acción son:

Peso propio

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = r \cdot e \cdot \sin \theta \\ Z = -r \cdot e \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Nieve

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = \frac{q}{2} \sin 2\theta \\ Z = -q \cos^2 \theta \end{cases}$$

Acción normal a la sup.

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = P \end{cases} \quad (\text{positiva si es hacia afuera})$$

LAMINA CILINDRICA CIRCULAR SOMETIDA AL PESO PROPIO

Teniendo en cuenta los valores de las componentes de carga del peso propio obtenemos directamente aplicando la ecuación (1)

$$\left. \begin{aligned} x=0 \\ y = r \cos \theta \\ z = -r \sin \theta \end{aligned} \right\} N_{\theta} = -r \epsilon R \cos \theta \quad \text{valor que no depende de } x, \text{ al no hacerlo el peso propio}$$

Recordando que  $ds = R \cdot d\theta$ , la derivada respecto a  $s$  de  $N_{\theta}$  es

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial s} = \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} = r \epsilon \sin \theta$$

y, aplicando la ecuación (2) se obtiene

$$r \epsilon \sin \theta + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} + \gamma = 0 \quad \therefore N_{\theta x} = \int -2r \epsilon \sin \theta \, dx$$

$$\therefore N_{\theta x} = -2r \epsilon x \sin \theta + C_1$$

si la lámina posee unas condiciones de sustentación de modo que en el origen de  $x$  (para  $x=0$ ) hay simetría, entonces debe ser  $N_{\theta x} = 0$  en ese punto, puesto que una parte no ejerce ninguna acción tangencial sobre su simétrica, por lo que, con dicho origen de  $x$ ,  $C_1 = 0$ , y queda

$$N_{\theta x} = -2r \epsilon x \sin \theta \quad \text{que depende linealmente de } x$$

volviendo a derivar respecto a  $s$  y aplicando la ecuación (3)

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial s} = \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = -\frac{2r \epsilon}{R} x \cos \theta \quad \therefore \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{2r \epsilon}{R} x \cos \theta = 0$$

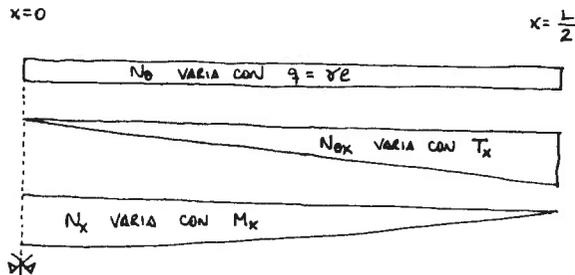
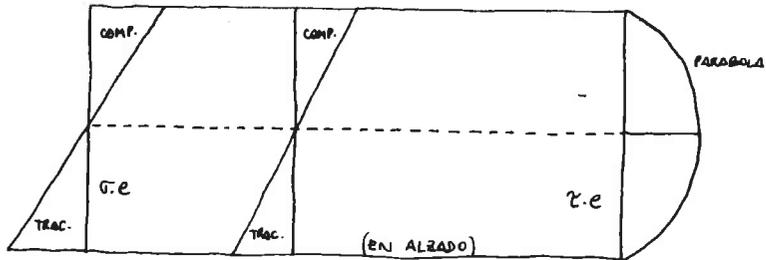
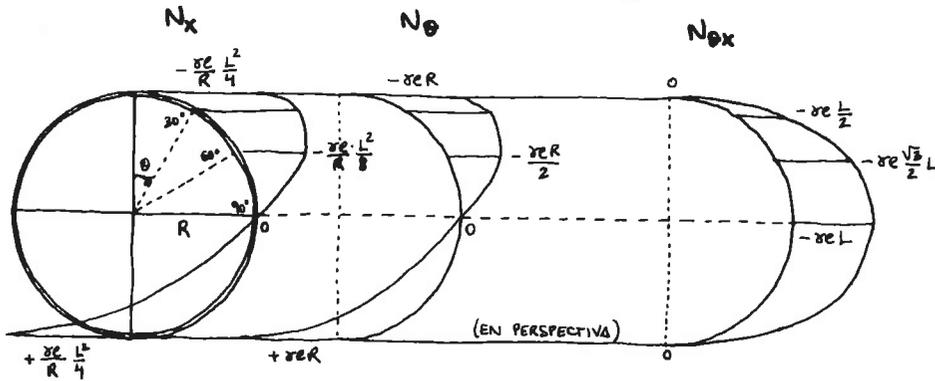
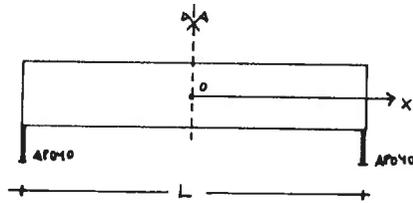
$$\therefore N_x = \frac{r \epsilon}{R} x^2 \cos \theta + C_2$$

esta otra constante de integración también hay que determinarla según las condiciones de borde (de apoyo, en este caso); si suponemos la lámina, que es simétrica respecto a  $x=0$ , BI-APOYADA en los puntos  $x = \pm L/2$ , es decir, con una sustentación en dichos puntos que impide la resistencia de  $N_x$ , obtenemos

$$x = \pm \frac{L}{2} \quad N_x = 0 \quad \therefore C_2 = -\frac{r \epsilon}{R} \frac{L^2}{4} \cos \theta$$

$$N_x = -\frac{r \epsilon}{R} \cos \theta \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) \quad \text{valor que varía parabólicamente con } x$$

En la figura se han representado los diagramas de esfuerzos de  $N_x$  en el centro ( $x=0$ ), donde tiene el valor máximo, de  $N_{\theta x}$  en el apoyo ( $x = \pm L/2$ ) donde también posee el valor máximo, y de  $N_{\theta}$  que es constante a lo largo de  $x$ . Si dichos valores se observan en proyección (en alzado) se identifican claramente con los esfuerzos  $\sigma$  y  $\tau$  de una viga sometida a flexión y, efectivamente,  $N_x (= \sigma \cdot e)$  varía con el momento flector y  $N_{\theta x} (= \tau \cdot e)$  varía con el cortante que producen las cargas.



LAMINA CILINDRICA COMO TUBO HUECO, EXPRESIONES GENERALES

Los resultados obtenidos en la página anterior nos sugieren el estudio de la lámina cilíndrica circular como una viga sometida a unas sollicitaciones en función de la carga; viga de sección circular de la que, una vez conocida la expresión de la inercia y de sus momentos estáticos, podemos obtener las tensiones consecuencia de las sollicitaciones.

En la sección de estos apuntes titulada "Acción horizontal sobre una membrana de revolución" se obtuvieron los valores de la inercia y del momento estático de la sección circular completa y de un arco de la misma, respectivamente

$$I = e \pi R^3 \qquad S = 2eR^2 \sin \theta$$

recordando las expresiones que nos dan las tensiones normales y las tangenciales en la sección

$$\sigma = \frac{-M_x}{I} y \quad \tau = \frac{T_x}{I e a} S$$

$y = R \cos \theta$        $a = 2e$

obtenemos como expresiones generales

$$N_x = \sigma \cdot e = - \frac{M_x}{\pi R^2} \cos \theta$$

(y sigue siendo  $N_\theta = 2 \cdot R$ )

$$N_{\theta x} = \tau \cdot e = \frac{T_x}{\pi R} \sin \theta$$

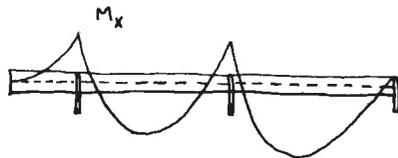
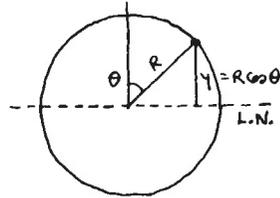
con las que podemos calcular los esfuerzos que aparecen en la lámina cilíndrica circular con cualesquiera condiciones de apoyo o de continuidad, pues basta calcular previamente las leyes de momentos ( $M_x$ ) y de cortantes ( $T_x$ ) como en cualquier tipo de viga y aplicar las expresiones anteriores para la obtención de los esfuerzos.

Como comprobación respecto al caso anterior del peso propio, si sustituimos  $M_x$  y  $T_x$  por sus leyes correspondientes a una viga bi-apoyada de luz L y de carga continua  $q = 2\pi R \cdot \gamma \cdot e$  obtenemos valores idénticos

$$T_x = -qx \qquad N_{\theta x} = \frac{-2\pi R \gamma e x}{\pi R} \sin \theta = -2\gamma e x \sin \theta$$

$$M_x = q \left( \frac{L^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) \qquad N_x = \frac{-2\pi R \gamma e \cos \theta}{\pi R^2} \frac{L^2}{2} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) = -\frac{\gamma e}{R} \cos \theta \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

La teoría de la membrana se basa en que el régimen de esfuerzos considerados se mantiene de forma continua en todos los puntos de la misma; es por ello que, si la lámina cilíndrica circular sólo fuera medio cilindro ( $\theta$  variando entre  $-90^\circ$  y  $+90^\circ$ ), por ejemplo, se seguirían utilizando las mismas expresiones que para el cilindro completo, añadiendo unas condiciones en los bordes que garanticen la continuidad en los mismos del régimen de membrana. Por tanto, aunque el cilindro no sea completo, utilizaremos las mismas expresiones siempre (derivadas de la sección completa) para la obtención de esfuerzos.



COMO VIGA CONTINUA

## LAMINA CILINDRICA CIRCULAR SOMETIDA A LA ACCION DE LA NIEVE

En este caso la ley de cargas no es continua, pues tiene distintos valores para la cara superior e inferior del cilindro

$$\text{para } |\theta| < \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x=0 \\ y = \frac{q}{2} \sin 2\theta \\ z = -q \cos^2 \theta \end{cases} \quad \text{para } |\theta| > \frac{\pi}{2} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Comparemos los resultados que se obtienen según la teoría de la membrana y como viga de sección circular.

## TEORIA DE LA MEMBRANA

$$|\theta| < \frac{\pi}{2} \quad N_{\theta} = -qR \cos^2 \theta \quad |\theta| > \frac{\pi}{2} \quad N_{\theta} = 0$$

$$\frac{dN_{\theta}}{dx} = -3q \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{dN_{\theta}}{dx} = 0$$

en  $x=0$  en el eje de simetría

$$N_{\theta x} = -\frac{3}{2} q x \sin 2\theta$$

$$N_{\theta x} = 0$$

$$\frac{dN_x}{dx} = \frac{3q}{R} x \cos 2\theta$$

$$\frac{dN_x}{dx} = 0$$

para viga bi-apoyada  $N_x = 0$  para  $x = \pm \frac{L}{2}$

$$N_x = -\frac{3}{2} \frac{q}{R} \cos 2\theta \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

$$N_x = 0$$

## COMO VIGA DE SECCION CIRCULAR

La carga que actúa sobre la viga  $\rightarrow 2Rq$

$$T_x = -2Rq x \quad M_x = 2Rq \left( \frac{L}{4} - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$N_{\theta x} = \frac{T_x}{\pi R} \sin \theta = -\frac{2q x}{\pi} \sin \theta$$

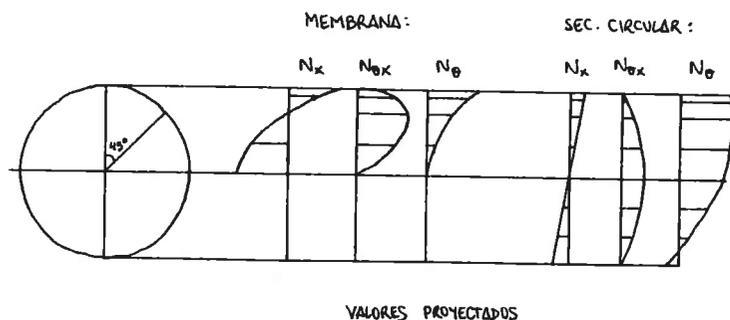
$$N_x = -\frac{M_x}{\pi R^2} \cos \theta = -\frac{q}{\pi R} \cos \theta \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

$$\frac{dN_{\theta x}}{dx} = -\frac{2q}{\pi} \sin \theta \quad \text{aplicando la ecuación [2]}$$

$$\frac{dN_{\theta}}{ds} = \frac{2q}{\pi} \sin \theta - \frac{q}{2} \sin 2\theta \quad \therefore N_{\theta} = qR \left[ -\frac{2}{\pi} \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{4} \right] + C$$

haciendo  $N_{\theta} = -qR$  para  $\theta = 0$  (igual teoría membrana)

$$\text{obtenemos } N_{\theta} = qR \left[ -\frac{2}{\pi} \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{4} + \frac{2}{\pi} - \frac{5}{4} \right]$$



Los valores de la membrana y de la sección circular están a la misma escala relativa.

Los diagramas de la membrana podemos considerarlos válidos hasta el valor de  $\theta = 90^\circ$ , a partir de este punto (donde la ley de cargas pasa a tener valores nulos) aparece una incompatibilidad de deformaciones, debido a que no puede trabajar como viga solamente medio cilindro y el otro no tener ningún esfuerzo.

Los valores obtenidos como sección circular merecen mejor apreciación en lo que respecta a  $N_x$  y  $N_{\theta x}$  cuando consideramos el cilindro completo o casi completo.

Sin embargo, en este segundo caso tampoco los valores son del todo correctos puesto que, al no tener en cuenta la entrada de cargas en la sección, se obtiene el valor de  $N_{\theta}$  que se ve en el diagrama, valor que no se corresponde con Z.R (equilibrio de la componente normal de carga), que en la mitad inferior debería ser nulo, lo que supondría una corrección total en los diagramas.

En realidad, como rara vez se superan los  $90^\circ$  en la construcción de láminas cilíndricas circulares, recomendamos la utilización de la teoría de la membrana, correcta hasta ese valor de  $\theta = 90^\circ$ .

LAMINA CILINDRICA CIRCULAR SOMETIDA A LA ACCION DEL VIENTO

Consideramos aquí solamente el viento lateral (perpendicularmente al eje x), ya que longitudinalmente el viento produce succiones variables de difícil determinación e integración, quizás también de menor importancia debido a que puede ser contrarrestada por las acciones gravitatorias.

Transversalmente, el problema principal consiste en la determinación correcta de la acción, ya que ésta depende del peralte de la bóveda, de la altura de la pared situada debajo de ella y de los edificios cercanos.

En la figura se comparan los valores que proporciona la MV-101, que para sección rugosa viene a coincidir con la ley  $Z = 0,4 w$  para  $\theta > 0$  y  $Z = 0,8 w \cdot \cos \theta$  para  $\theta < 0$  (de puntos en la figura).

Sin embargo nosotros utilizaremos la ley

$$X = Y = 0 \quad Z = w_0 + w \cdot \text{sen} \theta$$

que parece ajustarse más a los valores obtenidos en ensayos sobre modelos en túneles aerodinámicos (en la figura se ha representado el caso en que  $w_0 = w/3$ )

Según la teoría de la membrana, utilizando como siempre las expresiones (1), (2) y (3) obtenemos

$$N_{\theta x} = (w_0 + w \text{sen} \theta) R \quad N_{\theta x} = -w x \cos \theta \quad N_x = \frac{w \text{sen} \theta}{2R} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

(PARA LAMINA BIADRYADA EN  $x = \pm L/2$ )

Veamos qué obtenemos en este caso obteniendo los esfuerzos como viga de sección circular. En primer lugar hemos de sumar las componentes horizontales y verticales de las cargas (para el tubo completo), para ver la ley de cargas de la viga

$$\begin{cases} q_n = \int_{-\pi}^{\pi} (w_0 + w \text{sen} \theta) \text{sen} \theta \, ds = R \left[ -w_0 \cos \theta + \frac{w \theta}{2} - \frac{w \text{sen} 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = w \pi R \\ q_v = \int_{-\pi}^{\pi} (w_0 + w \text{sen} \theta) \cos \theta \, ds = R \left[ w_0 \text{sen} \theta + \frac{w \text{sen}^2 \theta}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{cases}$$

el valor nulo de  $q_v$  podíamos haberlo intuido por la simetría de la mitad superior e inferior del tubo respecto a la distribución del viento.

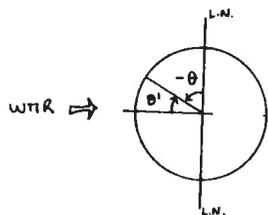
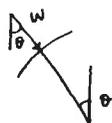
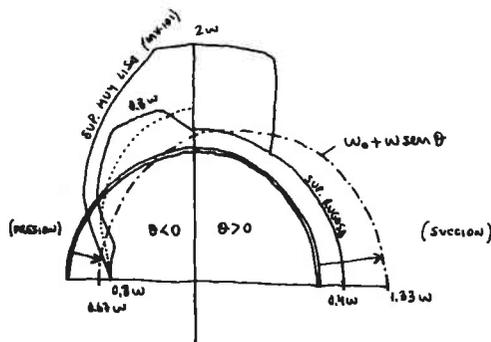
Las leyes de momentos y de cortantes son (ahora la flexión es lateral)

$$M_y = w \pi R \left( \frac{L^2}{8} - \frac{x^2}{2} \right) \quad T_y = -w \pi R x$$

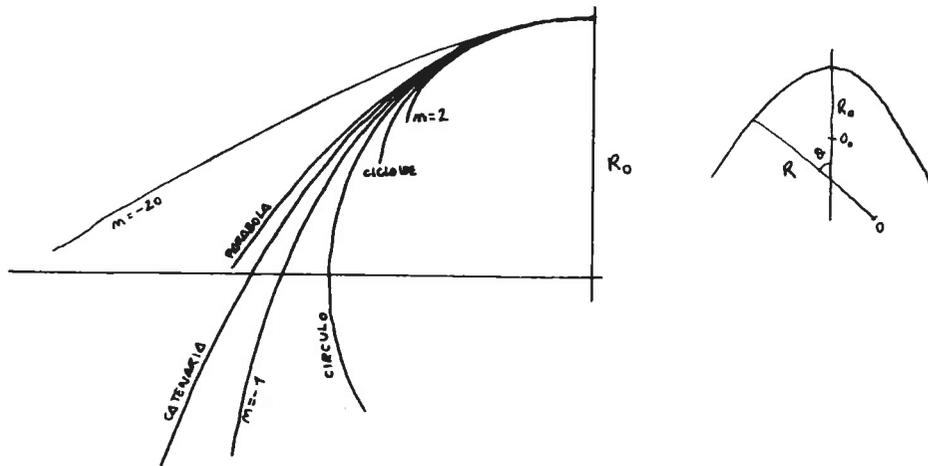
Utilizando las expresiones generales (pero poniendo  $\theta'$  en vez de  $\theta$ , puesto que la flexión es lateral, la línea neutra es vertical y cambia el origen de referencia de ángulos)  $\theta' = 90^\circ + \theta$   $\cos \theta' = -\text{sen} \theta$   $\text{sen} \theta' = \cos \theta$

$$N_x = -\frac{M_y}{\pi R^2} \cos \theta' = \frac{w \text{sen} \theta}{2R} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) \quad N_{\theta x} = \frac{T_y}{\pi R} \text{sen} \theta' = -w x \cos \theta$$

valores que coinciden plenamente con los obtenidos con la teoría de la membrana, por tanto EL VIENTO EQUIVALE A UNA CARGA HORIZONTAL TOTAL  $w \pi R$  (Y SE PUEDE UTILIZAR LAS EXPRESIONES GENERALES PARA LAMINAS CONTINUAS, POR EJ.) PRESION DINAMICA



LAMINAS CILINDRICAS DE DIRECTRIZ CUALQUIERA



La expresión  $R = R_0 \cdot \cos^n \theta$  donde  $R_0$  es el radio de curvatura en la clave permite expresar conjuntamente las siguientes directrices:

- círculo  $n = 0$
- cicloide  $n = 1$
- catenaria  $n = -2$
- parábola  $n = -3$

y las curvas intermedias que resultan de dar otros valores a  $n$ . Aplicando, como siempre, las ecuaciones (1), (2) y (3) del equilibrio de las membranas cilíndricas obtenemos (para láminas bi-apoyadas en los puntos  $x = \pm L/2$ )

PESO PROPIO

$$N_\theta = -x \ell R_0 \cos^{m+1} \theta$$

$$N_{\theta x} = -(m+2) x \ell \sin \theta$$

$$N_x = -\frac{m+2}{2} \frac{x \ell}{R_0} \cos^{1-m} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

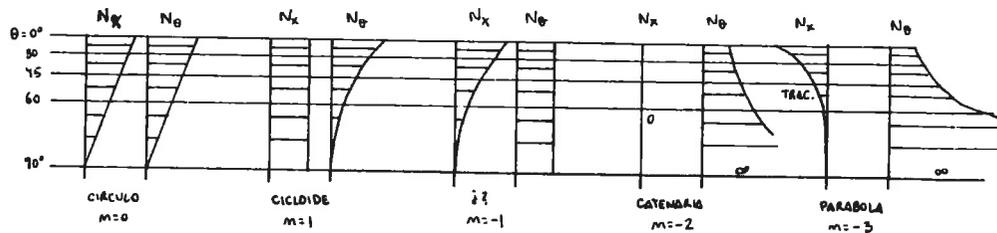
NIEVE

$$N_\theta = -q R_0 \cos^{m+2} \theta$$

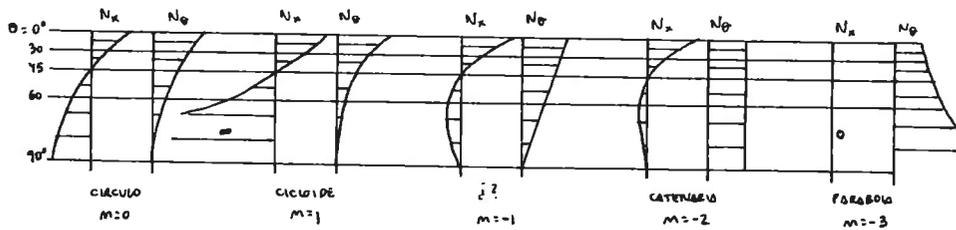
$$N_{\theta x} = -\frac{m+3}{2} q x \sin 2\theta$$

$$N_x = -\frac{m+3}{2} \frac{q}{R_0} \frac{\cos 2\theta}{\cos^m \theta} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

PESO PROPIO :



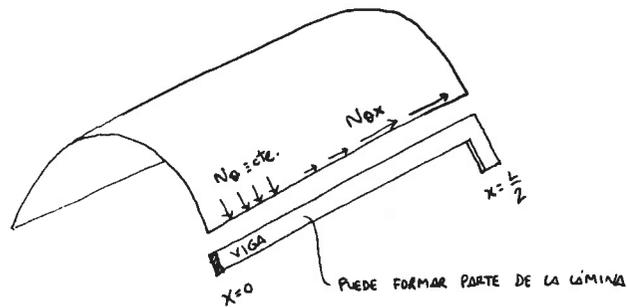
NIEVE :



El viento no podemos plantearlo en general puesto que la ley de variación del mismo sería distinta para cada tipo de superficie.

Por otro lado, tampoco podemos plantear el uso de expresiones generales en función de  $M_x$  y de  $T_x$  puesto que no podemos obtener los valores de  $I$  y de  $S$  si las curvas no son cerradas.

Observando los diagramas de esfuerzos representados al margen ( $N_\theta$  como esfuerzo de carga sobre las vigas de borde y  $N_x$  como consecuencia de la transmisión de cargas mediante flexión en la dirección  $x$ ) observamos que, en el caso del peso propio, la bóveda circular con  $\theta < 90^\circ$  descarga sobre las vigas de borde una parte del peso propio tanto menor cuanto mayor es  $\theta$ , hasta hacerse nula dicha descarga cuando  $\theta = 90^\circ$ . Si la directriz es una catenaria, el peso propio viene transmitido totalmente a las vigas de borde, sin que exista el mecanismo de flexión. Si es una parábola, los anillos de la bóveda transmiten a la viga de borde esfuerzos  $N_\theta$  mayores que el peso de la bóveda y el mecanismo de flexión trabaja "al revés" compensando la diferencia. Al igual que ocurría con la catenaria y el peso propio, ocurre también con la parábola y la nieve (en ambos casos nos encontramos con la curva antifunicular de la carga) que los anillos transmiten todo el peso a las vigas de borde y no hay flexión en la dirección de  $x$ .



### CONDICIONES DE BORDE EN LAMINAS CILINDRICAS

Las vigas de borde deberían tener la finalidad de sustituir a las partes de la bóveda que se suponen suprimidas, es decir, deben ejercer sobre los bordes las mismas reacciones que produciría el resto de la lámina si fuera continua. Habría que cuidar las proporciones de las vigas respecto a la bóveda para que se deformaran de forma conjunta y se mantenga el régimen estático previsto.

Están cargadas, por tanto, las vigas de borde con los esfuerzos  $N_\theta$  (que le producen una flexión, es decir, un  $M_V$  y un  $T_V$ ) y con los esfuerzos  $N_{\theta x}$  (que le producen un régimen de  $N_V$ ).

$N_\theta$  constituye una carga uniformemente repartida, con lo que

$$T_V = +N_\theta \cdot x \quad M_V = N_\theta \cdot \left( \frac{L}{2} - \frac{x^2}{2} \right)$$

para viga de borde biapoyada en los puntos  $x = \pm L/2$

$N_{\theta x}$  suele variar a lo largo de  $x$ , con lo que

$$N_V = \int_{\frac{L}{2}}^x N_{\theta x} \cdot dx$$

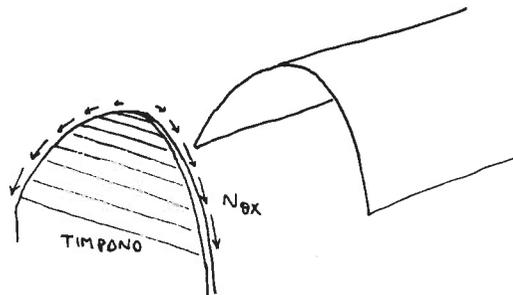
Particularizando el valor de los esfuerzos en cada caso, obtendremos las sollicitaciones de la viga de borde. Por ejemplo, para la lámina cilíndrica circular sometida al peso propio, se obtiene

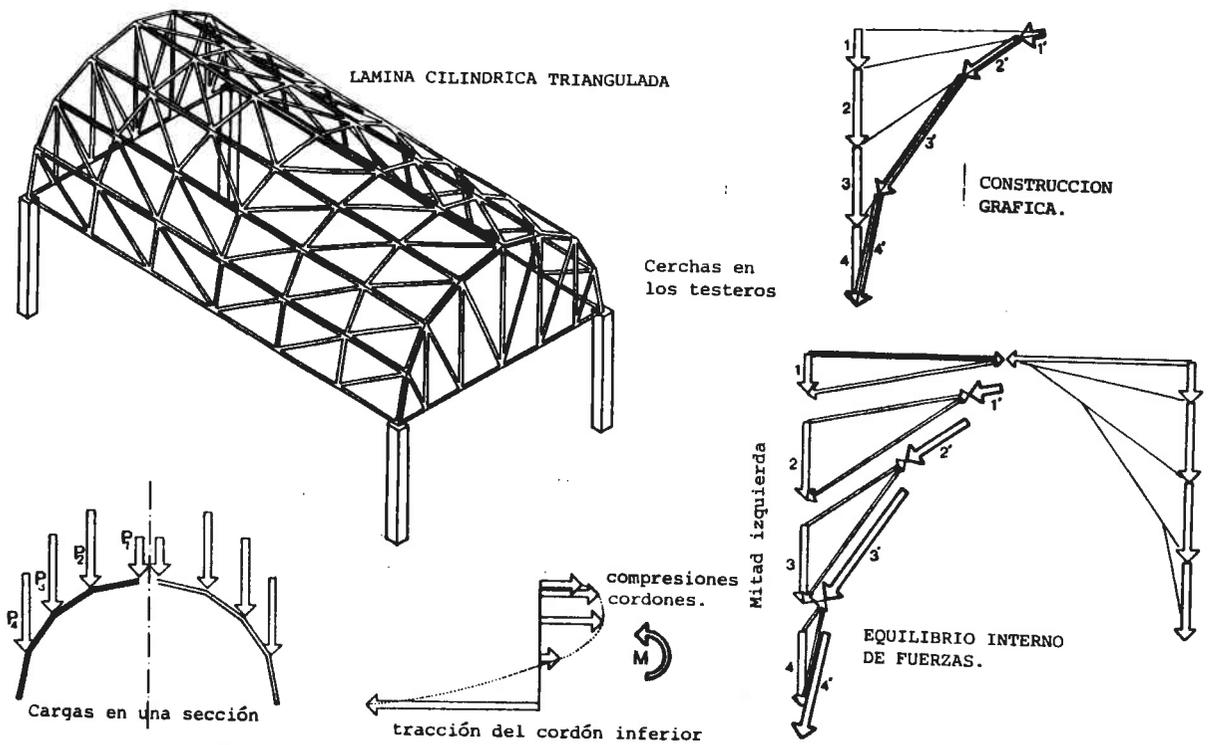
$$\begin{array}{l|l} N_\theta = -\gamma_e R \cos \theta & T_V = -\gamma_e R x \cos \theta \quad \text{cortantes} \\ N_{\theta x} = -2\gamma_e x \sin \theta & M_V = -\frac{\gamma_e R}{2} \cos \theta \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) \quad \text{momentos flectores} \\ & N_V = \gamma_e \sin \theta \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) \quad \text{tracciones} \end{array}$$

$T_V$  varía con  $T_x$ ,  $M_V$  y  $N_V$  varían ambos parabólicamente, con  $M_x$ .

Los tímpanos (que pueden estar constituidos por una pared llena o reticular, o también por un arco) sólo reaccionan ante los esfuerzos  $N_{\theta x}$ .

En el caso de láminas continuas o posibles empotramientos, se equilibrarían además los esfuerzos  $N_x$ ).





LAMINA CILINDRICA TRIANGULADA. METODO GRAFICO

Se supone que la bóveda semicilíndrica está formada por un conjunto de vigas trianguladas biapoyadas (también podrían ser continuas) cargadas cada una de ellas con las fuerzas 1', 2', 3' y 4', según su inclinación; fuerzas de inmediata obtención gráfica, que serán transmitidas mediante flexión en las vigas hasta los apoyos de los testeros. Los cordones de dichas vigas son compartidos, es decir, el comprimido superior de una viga es el traccionado inferior de la inmediata superior; al componer los esfuerzos en los cordones mediante suma de los esfuerzos que le proporcionan ambas vigas a las que pertenece, se obtiene un diagrama de compresiones similar a la ley de  $N_x$  de las membranas, y una tracción en el último cordón equivalente al esfuerzo  $N_y$  que tendría la viga de borde de la membrana.

El cortante (equivalente a los  $N_{\theta x}$  de la membrana) es resistido por las triangulaciones intermedias y es proporcional en cada viga a 1', 2', etc.

ECUACION GENERAL DE EQUILIBRIO DE UNA MEMBRANA

Supongamos una membrana cualquiera definida en ejes OX, OY, OZ por la ecuación de su superficie media:  $z = z(x,y)$

Si aislamos un elemento diferencial de la misma de lados  $ds_1, ds_2$ , sobre ellos actúan los esfuerzos por unidad de longitud  $N_1, N_2$  y  $N_{12} = N_{21}$  (los esfuerzos tangenciales son iguales para que haya equilibrio de momentos localmente).

Para simplificar el problema nos interesa trabajar sobre la proyección del elemento diferencial sobre el plano OXY (de lados  $dx, dy$ ), ya que descompondremos la fuerza  $F \cdot ds_1 \cdot ds_2$  que actúa sobre el elemento de la membrana en la suma de tres componentes según los ejes coordenados  $X \cdot dx \cdot dy, Y \cdot dx \cdot dy, Z \cdot dx \cdot dy$ . Obtengamos primero los esfuerzos equivalentes en proyección:

$$(N_1 \cdot ds_2) \frac{dx}{ds_1} = (N_x \cdot dx) \quad (N_2 \cdot ds_1) \frac{dy}{ds_2} = (N_y \cdot dy) \quad (N_{12} \cdot ds_1) \frac{dx}{ds_1} = N_{xy} \cdot dx$$

FUERZA PRODUCIDA POR EL ESFUERZO AXIAL EN EL PLANO HORIZONTAL Y EN LA DIRECCION X.

ID. EN DIRECCION Y.

$$ds_1 = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right)^2}$$

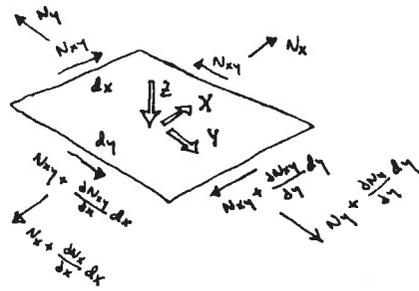
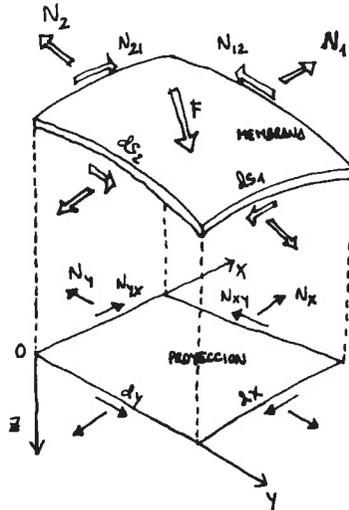
$$ds_2 = \sqrt{dy^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2}$$

CON LO QUE OBTENEMOS:

$$N_1 = N_x \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

$$N_2 = N_y \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}$$

$$N_{12} = N_{xy}$$



ecuaciones que ligam los esfuerzos proyección con los reales.

Para comprobar el equilibrio en la dirección X los hacemos sobre la proyección:

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy\right) dx + X dx dy = 0 \quad \text{II} \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad [1]$$

primera ecuación de equilibrio; análogamente

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad [2]$$

Para comprobar el equilibrio en la dirección Z lo hacemos con las componentes verticales de los esfuerzos:

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dy + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dx + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy\right) \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx\right) \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy + Z \cdot dx \cdot dy = 0$$

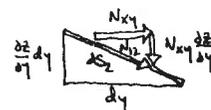
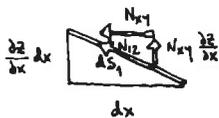
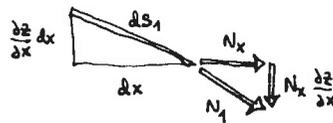
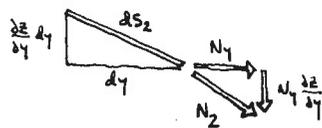
SIMPLIFICANDO:

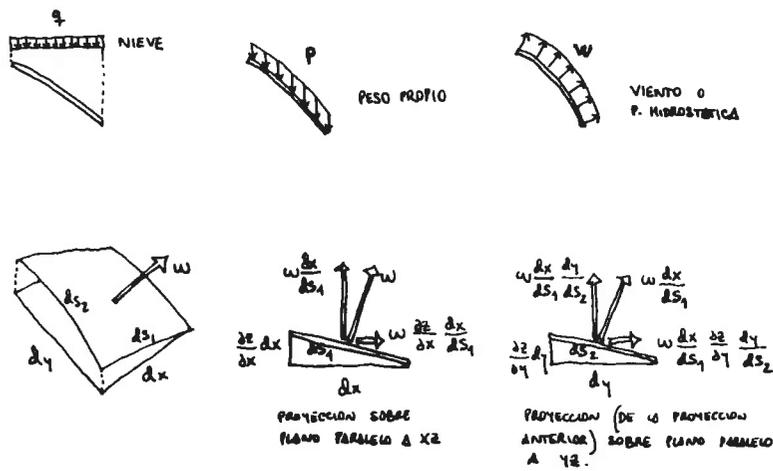
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( N_x \frac{\partial z}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_y \frac{\partial z}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + Z = 0$$

esta última ecuación también puede escribirse así:

$$N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -Z + X \frac{\partial z}{\partial x} + Y \frac{\partial z}{\partial y} \quad [3]$$

CURVATURA SEGUN X
CURVATURA SEGUN Y
CURVATURA DE ALABEO
COMPONENTES DE CARGA





COMPONENTES DE CARGA

Veamos el valor de cada una de las componentes X, Y, Z de carga que hemos utilizado antes en el equilibrio en función del tipo de carga.

- SOBRECARGA DE NIEVE: directamente  $X=0 \quad Y=0 \quad Z=q$

- PESO PROPIO: también son nulas las componentes X e Y; la componente vertical la determinamos mediante  $Z \cdot dx \cdot dy = p \cdot dS_1 \cdot dS_2$

RECORDANDO:  $dS_1 = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx\right)^2}$   $dS_2 = \sqrt{dy^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2}$  DESPRECIANDO EL TERMINO A LA 4ª DE  $\partial z$

OBTENEMOS:  $X=0 \quad Y=0 \quad Z = p \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

- VIENTO O PRESION HIDROSTATICA (NORMALES A LA SUPERFICIE). Vamos a considerarla 'hacia afuera' (succión en el caso de viento). Proyectando dos veces en planos paralelos a XZ e YZ se obtiene

$$\left. \begin{aligned} X dx dy &= \left( w \frac{dy}{dS_1} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dS_2} \right) dS_1 dS_2 \\ Y dx dy &= \left( w \frac{dx}{dS_1} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dS_2} \right) dS_1 dS_2 \\ Z dx dy &= - \left( w \frac{dx}{dS_1} \frac{dy}{dS_2} \right) dS_1 dS_2 \end{aligned} \right\}$$

CON LO QUE OBTENEMOS SIMPLIFICANDO:

$$X = w \frac{\partial z}{\partial x} \quad Y = w \frac{\partial z}{\partial y} \quad Z = -w$$

CASOS PARTICULARES

Según la geometría de la lámina y su comportamiento estructural, podemos destacar varios casos.

- ESTADO PLANO (vigas pared, vigas, ...). Condición:  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Consecuencias:  $N_1 = N_x \quad N_2 = N_y$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= -X \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -Y \end{aligned} \right\}$$

(el problema es hiperestático porque falta una ecuación; hay que acudir a la ecuación de compatibilidad:  $V^2(N_x + N_y) = 0$  o bien  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(N_x + N_y) = 0$ )

- CATENARIAS O FUNICULARES. Condiciones:  $N_x = N_{xy} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Consecuencias:  $N_1 = N_x = 0 \quad N_2 = N_y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_y}{\partial y} &= -Y \\ N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -Z + Y \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

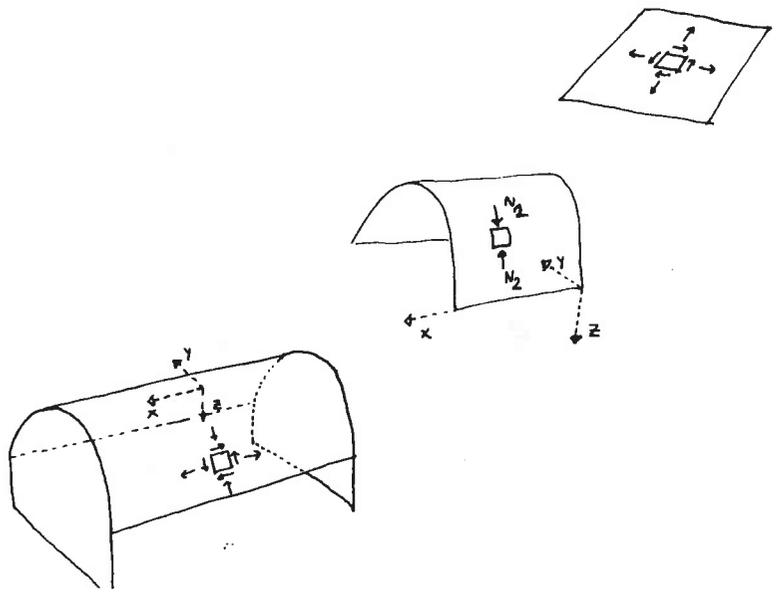
para peso propio y nieve  $Y=0 \quad N_y = cte$   
de aquí obteníamos para  $Z(y)$  la ecuación de la parábola para nieve (segundo término = -g) y la ecuación de la catenaria para peso propio (segundo término =  $-p \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ )

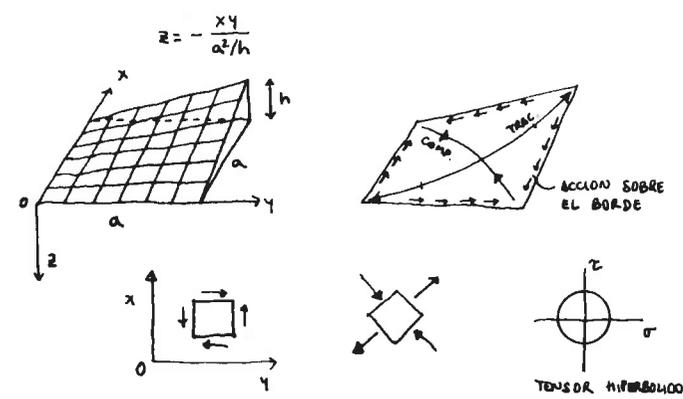
- LAMINAS-VIGA. Condición:  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Consecuencias:  $N_1 = \frac{N_x}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \quad N_2 = N_y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= -X \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= -Y \\ N_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -Z + Y \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

como VIGA  
como FUNICULAR





PARABOLOIDE HIPERBÓLICO EQUILATERO

Es una de las superficie más fácilmente resolubles por su sencilla integración. Dispuesta según se indica en la figura respecto a los ejes coordenados tiene por ecuación  $z = -xy/c$ , donde  $c = a^2/h$  (vemos que para  $x = cte.$  o  $y = cte.$  la superficie está formada por una haz de rectas, es una superficie reglada).

Las sucesivas derivadas de  $z$  son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{c} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{c} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{c}$$

Las ecuaciones de transformación quedan de la forma:

$$N_1 = N_x \frac{\sqrt{c^2+y^2}}{\sqrt{c^2+x^2}} \quad N_2 = N_y \frac{\sqrt{c^2+x^2}}{\sqrt{c^2+y^2}} \quad N_{12} = N_{xy}$$

- SOBRECARGA DE NIEVE

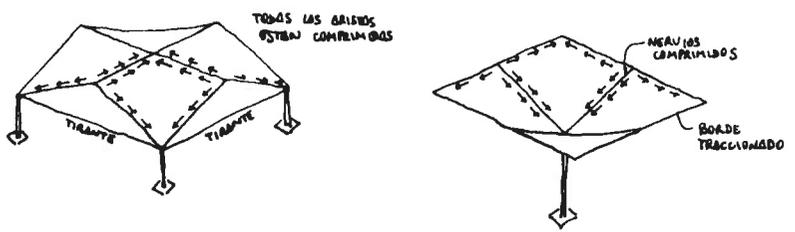
$X=0 \quad Y=0 \quad Z=q$

de la 3ª ecuación de equilibrio deducimos:  
y de la 1ª y 2ª, para bordes libres de esfuerzos normales

$$N_{12} = N_{xy} = \frac{qc}{2}$$

$$N_x = N_y = 0$$

vemos que la membrana está en un estado tangencial puro (tensor hiperbólico) Si la hubiésemos expresado en función de unos ejes  $OX', OY'$  girados  $45^\circ$  respecto a los anteriores (direcciones de máxima curvatura), hubiéramos obtenido la expresión  $z = -(x'^2 - y'^2) / \sqrt{2}c$  y al integrar habríamos obtenido  $N'_{12} = 0$ ,  $N'_1 = qc/2$ ,  $N'_2 = -qc/2$ , correspondientes a las direcciones principales de tracción y compresión respectivamente. Es decir, las direcciones de curvatura positiva o cóncavas hacia arriba, se comportan como cables a tracción, las direcciones convexas hacia arriba, como arcos a compresión.



Sobre los bordes se van produciendo una acumulación de esfuerzos que deber ser resistidos mediante piezas (o armaduras) a tracción o a compresión, dependiendo del modo en que unamos varios paraboloides para formar otras estructuras.

- PESO PROPIO  $X=0 \quad Y=0 \quad Z = \frac{p}{c} \sqrt{x^2+y^2+c^2}$

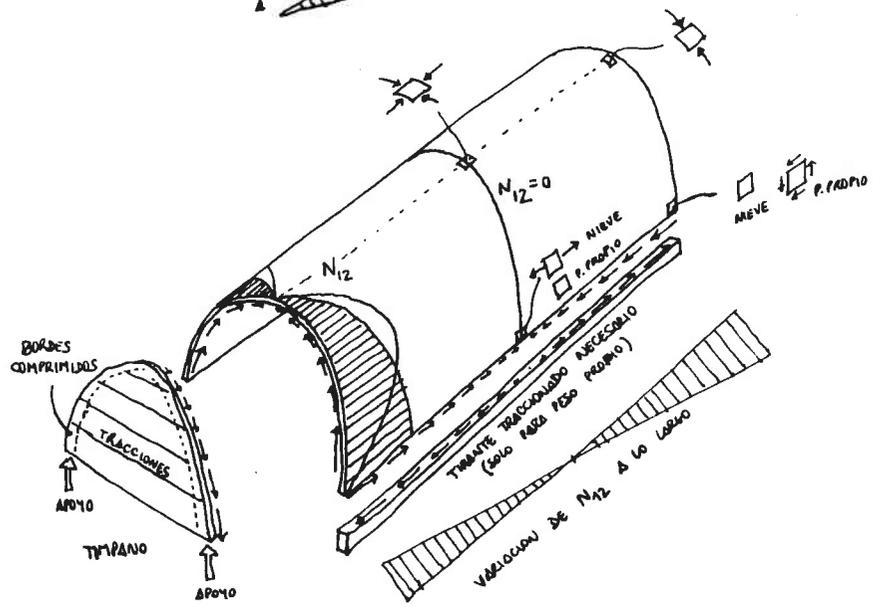
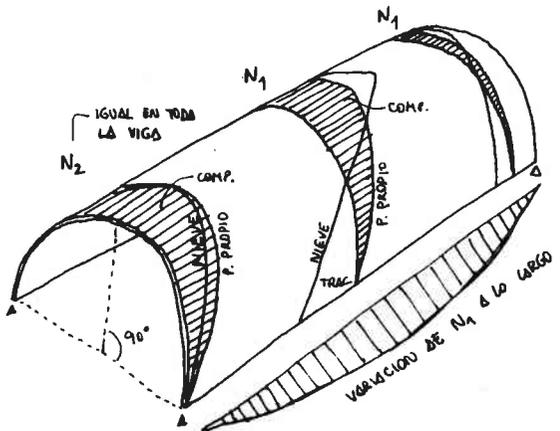
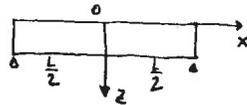
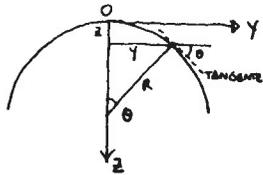
Aunque de integración algo menos sencilla, se obtiene:

$$N_{12} = N_{xy} = \frac{p}{2} \sqrt{x^2+y^2+c^2}$$

$$N_x = -\frac{p}{2} y \ln \frac{x + \sqrt{x^2+y^2+c^2}}{\sqrt{y^2+c^2}}$$

$$N_y = -\frac{p}{2} x \ln \frac{y + \sqrt{x^2+y^2+c^2}}{\sqrt{x^2+c^2}}$$

APLICANDO LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACION OBTENEMOS  $N_1$  y  $N_2$



LAMINA CILINDRICA

Como uno de los casos de láminas-viga, vamos a resolver la membrana de directriz circular. Vamos a expresar todo en función del ángulo  $\theta$ .

La ecuación de la directriz y las derivadas de z son:

$$z = R(1 - \cos\theta)$$

$$y = R \sin\theta$$

↳ derivando obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{R \cos\theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = R \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{R \cos\theta}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{R \cos^3\theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{R \cos^3\theta}$$

Las ecuaciones de transformación son:

$$N_1 = \frac{N_x}{\sqrt{1 + \frac{\partial z}{\partial y}^2}} = N_x \cdot \cos\theta$$

$$N_2 = N_y \sqrt{1 + \frac{\partial z}{\partial y}^2} = \frac{N_y}{\cos\theta}$$

$$N_{12} = N_{xy}$$

- NIEVE

X=0 Y=0 Z=7      APLICANDO LA 2ª ECUACION DE EQUILIBRIO

$$N_y \frac{1}{R \cos^3\theta} = -7 \quad \Rightarrow \quad N_2 = -7 R \cos^2\theta$$

APLICANDO LA SEGUNDA ECUACION DE EQUILIBRIO (tras sustituir  $\frac{\partial N_y}{\partial y}$ )

$$N_{xy} = \int -1.5g \sin 2\theta dx \quad \text{suponiendo que } N_{xy}=0 \text{ para } x=0 \quad N_{12} = N_{xy} = -1.5g \sin 2\theta \cdot x$$

APLICANDO LA PRIMERA ECUACION DE EQUILIBRIO (tras sustituir  $\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}$ )

$$N_x = \int 3g \frac{x}{R} \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} dx \quad \text{para } x = \pm \frac{L}{2} \quad N_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = -1.5g \frac{\cos 2\theta}{R} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

- PESO PROPIO

$$X=0 Y=0 Z = p \sqrt{1 + \frac{\partial z}{\partial y}^2} = \frac{p}{\cos\theta}$$

OPERANDO DEL MISMO MODO QUE ANTES SE OBTIENE:

$$N_2 = -PR \cos\theta$$

$$N_{12} = -2px \sin\theta$$

$$N_1 = -\frac{p \cdot \cos\theta}{R} \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right)$$

La interpretación de los resultados puede verse en las figuras.

Aunque sólo se ha representado hasta  $\theta = 90^\circ$ , las fórmulas son válidas para cualquier valor del ángulo. Hay que tener mucho en cuenta las acciones que son necesarias en los bordes para que haya equilibrio. Por ejemplo, para el caso de la lámina semicilíndrica (la representada en la figura), ésta se comporta como una viga completamente, sin necesidad de ningún tirante ni nervio entre apoyos, con sólo la carga de nieve; sin embargo, con el peso propio, necesitan unos tirantes de apoyo a apoyo que vayan resistiendo la acumulación de esfuerzos tangenciales. Si la lámina terminara con un borde para  $\theta < 90^\circ$ ; haría además falta una viga de apoyo a apoyo en cada borde lateral para resistir los empujes  $N_2$  que no serían nulos en el borde.